ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ФОКЕРА-ПЛАНКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Бейбалаев В.Д.

Дагестанский Государственный Университет

На основе уравнения Смолуховского-Эйнштейна дается вывод обобщенного уравнения Фокера – Планка в производных дробного порядка. Рассматривается некоторые решения уравнения параболического типа с дифференцированием дробного порядка $\alpha, (0 < \alpha \le 1)$.

Отсутствие адекватных количественных моделей процессов тепломассообмена в многокомпонентных системах со сложной пространственно- временной структурой, для которых характерны эффекты памяти, самоорганизации привело к тенденции пересмотра основных положений теории тепломассообмена. Одно из направлений связано с использованием принципа локальной неравновесности [1], что позволяет построить более последовательную теорию массопереноса в гетерогенных системах [2]. Другие направления связаны с использованием методов фликер-шума [3], детерминированного хаоса [4], концепции фрактала [5].

Одним из эффективных методов исследования процессов тепломассопереноса является метод основанный на применении стохастических дифференциальных уравнений [6]. В настоящей статье выводятся обобщенные уравнения Фокера-Планка в производых дробого порядка на основе уравнения Смолуховского–Эйнштейна. Рассматриваются решения некоторых частных случаев обобщенного уравнения Фокера-Планка и их приложения к теории теплопроводости. фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой.

Значительные успехи при рассмотрении кинетических явлений в системах с фрактальной структурой связаны с использованием формализма интегродифференцирования дробного порядка . Повышенный интерес к дифференциальным уравнениям дробного порядка [7-9] обусловлено их физической интерпретацией [10] . Было показано, что переход к производной дробного порядка по времени позволяет учитывать эффекты памяти системы [10]. Это и вызвало их широкое применение в механике, физике, биофизике экономике – практически во всех областях естествознания [11-16].

Область применимости решений дифференциальных уравнений дробного порядка значительно шире, чем дифференциальных уравнений с целочисленным дифференцированием, поскольку последние оказываются их частным случаем. Уравнения в производных дробного порядка, позволяют учесть процессы, в которых одновременно участвуют как обратимые, так и необратимые процессы [10,11]. Это позволяет не только получить принципиально новые результаты, но более глубоко осмыслить известные результаты, позволяя при этом, создать адекватные количественные модели исследуемых явлений

1. Обобщенное уравнение Фокера-Планка

В основе описания случайных процессов лежит уравнение Смолуховского-Эйнштейна, которое записывается для условной плотности вероятности имеет вид

$W(y_1 t_1 | y_2 t_2) dy_2$ [6]

$$W(y_1 | y_2; t + \Delta t) = \int dy_3 W(y_1 | y_3; t) W(y_3 | y_2; \Delta t) \qquad (1)$$

Для вывода обобщенного уравнения Фокера-Планка исходим из выражения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y)\frac{\partial^{\alpha} W(y|y_1;t)}{\partial^{\alpha} t}dy \qquad (2)$$

где $0<\alpha\leq 1$, производная дробного порядка определена соотношением [7]

$$\frac{\partial^{\alpha} W(y|y_1;t)}{\partial t^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{W(y|y_1;\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \qquad (3)$$

Здесь *Г(z)* – гамма-функция Эйлера. С помощью соотношений (2), (3) уравнение Смолуховского- Эйнштейна (1) можно привести к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y)\frac{\partial^{\alpha} W(y|y_1;t)}{\partial^{\alpha} t}dy=\int dydy_2dt_2Q(y)W(y_2\mid y_1;t_2)W^{(\alpha)}(y_2\mid y;t-t_2) \qquad (4)$$

где введена функция

$$W^{(\alpha)}(y_2\mid y;t-t_2)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{W(y_2\mid y;z-t_2)}{(t-z)^{\varepsilon}}dz$$

В дальнейшем мы воспользуемся разложением функции $Q(y)$ в обобщенный ряд Тейлора [7]

$$Q(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y-y_2)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)}\frac{d^{\beta+n}}{dy^{\beta+n}}Q(y)\Big|_{y=y_2}$$

где $0<\beta\leq 1$. В результате уравнение (4) можно привести к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y)\frac{\partial^{\alpha} W(y|y_1;t)}{\partial^{\alpha} t}dy=\sum_{n=0}^{\infty}\int dy_2dt_2\frac{Q^{(n+\beta)}(y_2)}{\Gamma(n+\beta+1)}A^{\alpha}_{n+\beta}(y_2;t-t_2)W(y_2\mid y_1;t_2) \qquad (5)$$

где введены функции

$$A^{\alpha}_{n+\beta}(y_2;t-t_2)=\int dy(y-y_2)^{n+\beta}W^{(\alpha)}(y_2\mid y;t-t_2) \qquad (6)$$

Функции $A^{\alpha}_{n+\beta}$ - представляют собой обобщенные моменты. При $\alpha=1$ и $\beta=1$ (6) переходит в обычное выражение для момента. В (6), произведя интегрирование по частям, окончательно получим следующее дифференциальное уравнение в производных дробного порядка

$$\frac{\partial^{\alpha} W(y\mid y_1;t)}{\partial t^{\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\beta+1)}\frac{\partial^{n+\beta}}{\partial y^{n+\beta}}\int dt_2\left[A^{\alpha}_{n+\beta}(y;t-t_2)W((y\mid y_1;t_2)\right] \qquad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой обобщенное уравнение Фокера-Планка записанное в производных дробного порядка. Обобщенное уравнение Фокера-Планка (7) позволяет исследовать новый класс стохастических процессов, которые реализуются в системах с фрактальной структурой.

В дальнейшем рассмотрим различные модификации уравнения (7). В частности, предполагая, что для обобщенных моментов справедливо выражение

$$A^{\alpha}_{n+\beta}(y_2;t-t_2)=A^{\alpha}_{n+\beta}\cdot\delta(t-t_2)$$

получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^{\alpha} W(y|y_1;t)}{\partial t^{\alpha}} = -\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\frac{\partial^{\beta}}{\partial y^{\beta}}\left(A_{\beta}^{\alpha} W(y|y_1;t)\right) + \frac{1}{\Gamma(2+\beta)}\frac{\partial^{1+\beta}}{\partial y^{1+\beta}}\left(A_{1+\beta}^{\alpha} W(y|y_1;t)\right) \quad (8)$$

В случае $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ уравнение (7) переходит в известное уравнение Фокера-Планка [6]. Таким образом, уравнение (7) представляет собой обобщенное уравнение Фокера-Планка.

Уравнение типа (7) лежит в основе различных задач тепломассопереноса. Уравнения типа (8) используются при исследовании задач тепломассопереноса.

1. В качестве применения уравнений типа (8) рассмотрим обобщенное уравнение теплопроводности [17]

$$\frac{d^{\alpha} T(\tau,\xi)}{d\tau^{\alpha}} - a\frac{t_0}{l_0^2}\frac{d^{\beta} T(\tau,\xi)}{d\xi^{\beta}} = 0$$

где $0 < \alpha \le 1, 1 < \beta \le 2$, $\tau = \dfrac{t}{t_0}$, $\xi = \dfrac{x}{l_0}$ - безразмерные время и координата, t_0, l_0 - характерные временной и масштабный параметры, $a = \lambda/(\rho \cdot c_v)$ - коэффициент температуропроводности.

Приложение уравнения обобщенной теплопроводности к задачам теории теплового поля земли в рамках концепции фрактала рассмотрено в работе. В частности в случае стационарного поля для распределения температуры в глубь земли получаем следующий результат

$$T(\xi) = A\xi^{1-\varsigma} + B\xi^{\varsigma}, 0 < \varsigma \le 1.$$

Таким образом, распределение температуры имеет нелинейный характер.

2. Рассмотрим частный случай дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^{\alpha} f(x,t)}{\partial t^{\alpha}} - D\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad (9)$$

где $0 < \alpha \le 1, t > 0, |x| < \infty$.

В качестве функции f может быть рассмотрена температура при рассмотрении задач теплопроводности, концентрация вещества при рассмотрении задач массопереноса [18], и распределения давления при рассмотрении задач гидродинамики [15].Решение уравнения зависит от вида начальных условий. Рассмотрим случай, когда начальное условие к уравнению (1) дается в виде

$$\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} f(x,0) = A(x) \qquad (10)$$

Задачу Коши (9),(10) решаем, совершая преобразование Фурье по переменной x

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) f(k,t)$$

В результате уравнение (9) запишется в виде

$$\frac{\partial^{\alpha} f(k,t)}{\partial t^{\alpha}} + Dk^2 f(k,t) = 0$$

решение которого, с начальным условием $\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} f(k,0) = a(k)$ известно [7]

$$f(k,p) = a(k)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-Dk^2t^\alpha)$$

Здесь $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha\cdot n+\beta)}$ - функция Миттаг-Леффлера [7].

Отметим, что для целых α функцию Миттаг-Леффлера можно свести к гипергеометрическому ряду. Например, при α =*k=1,2,…n* получим

$$E_{k,\beta}(-z^k) == (2\pi)^{(k-1)/2}k^{1/2-\beta}\prod_{l=0}^{k-1}\Gamma(\frac{\beta+l}{k})\cdot{}_1F_k(1;\frac{\beta}{k},\frac{\beta+1}{k},\cdots,\frac{\beta+k-1}{k};-\left(\frac{z}{k}\right)^k)$$

где ${}_pF_q(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z)$ гипергеометрическая функция

Для определения исходной функции, совершая обратно преобразование Фурье, окончательно получим

$$f(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi}\int_{=\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dx' \exp(ik(x-x')A(x')E_{\alpha,\alpha}(-Dk^2t^\alpha) \qquad (11)$$

Для δ-источника $A(x)=\delta(x)$ и при $\alpha=1$ решение (11) учитывая, что $E_{1,1}(-z)=\exp(-z)$, принимает известный вид

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}\exp(-\frac{x^2}{4Dt}) \qquad (12)$$

В остальных случая мы имеем новый класс решений.

В случае, например α =1/2, 1/4 функция $E_{\alpha,\alpha}(-z^\alpha)$ принимает вид

$$E_{1/2,1/2}(-\sqrt{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{z}\exp(z)\left[1-erf\left(\sqrt{z}\right)\right]$$

$$E_{1/4,1/4}(-z^{1/4}) = \frac{1}{\Gamma(1/4)}{}_1F_1(1;1/4;z) + \frac{\sqrt{z}}{\Gamma(3/4)}{}_1F_1(1;3/4;z) - z^{3/4}\exp(z)\left[1+erf\left(\sqrt{z}\right)\right] - \frac{z^{1/4}}{\sqrt{\pi}}$$

Рассмотрим решение уравнения (7) когда задается начальное значение функции $f(x,t=0)=f(x.0)$. В этом случае удобно использовать преобразование Лапласа. При использовании преобразования Лапласа существенно то, что в отличие от обыкновенной производной, когда имеет место соотношение

$$\int_0^\infty \exp(-pt)\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt = pf(x,p) - f(x,0)$$

для дробной производной, как можно непосредственно убедиться имеет место соотношение $\int_0^\infty \exp(-pt)\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha}dt = p^\alpha f(x,p)$. Для учета начального условия $f(x,t=0)=f(x.0)$ необходимо его явно внести в уравнение и исходить из уравнения следующего вида [19]

$$\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{f(x,0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} - D\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad (13)$$

Второе слагаемое в (13), по существу, есть результат действия дробной производной на начальное условие. Совершая, как и ранее сначала преобразование Фурье по переменной x и, затем преобразование Лапласа по переменной t получим для $f(k,p)$ следующее выражение

$$f(k,p)=\frac{f(k,o)p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}+Dk^{2}}$$

что дает для искомой функции следующий результат

$$f(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}dk\exp(-ikx)f(k,0)E_{\alpha,1}(-Dk^{2}t^{\alpha})$$

Рассмотрим случай, когда $f(x,t=0)=\delta(x)$ тогда

$$f(x,t)=\int_{0}^{\infty}dk\cos(kx)E_{\alpha,1}(-Dk^{2}t^{\alpha}) \qquad (14)$$

При $\alpha=1$ решения (8) и (12) совпадают. Однако для остальных значений ($0<\alpha\le1$) эти решения существенно отличаются. Так, в отличие от решения (8) в (12) отсутствует сингулярный множитель $t^{\alpha-1}$, а также отличается второй индекс функции Миттаг-Леффлера ($\alpha\to1$). В этом случае имеем следующие выражения функции Миттаг-Леффлера , например, для $\alpha=1/2,1/4$:

$$E_{1/2,1}(-z^{1/2})=\exp(z)\left[1-erf(\sqrt{z})\right]$$

$$E_{1/4,1}(-z^{1/4})=\exp(z)\left[1+erf(\sqrt{z})-\frac{\gamma(1/4;z)}{\Gamma(1/4)}-\frac{\gamma(3/4;z)}{\Gamma(3/4)}\right]$$

где $\gamma(a;z)$ - неполная Гамма-функция. Характер решения (10) качественно не отличается от решения (5). Остановимся на решении задачи

$$\frac{\partial^{\alpha}f(x,t)}{\partial t^{\alpha}}-D\frac{\partial^{2}f(x,t)}{\partial x^{\alpha}}=0 \qquad (15)$$

для ограниченной области: $0<x\le l$, с краевыми условиями

$$f(x,0)=\varphi(x),$$

$$-\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}+h_{0}f(x,t)=0 \quad \text{при x=0} \qquad (16)$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}+hf(x,t)=0 \quad \text{при x=}l$$

Эта задача для краевых условий первого рода рассмотрена в работе [20]. Используя метод разделения переменных окончательно получим следующее решение задачи (15,16)

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n}(\cos(\lambda_{n}x)+\frac{h_{0}}{\lambda_{n}}\sin(\lambda_{n}x))\cdot E_{\alpha,1}(-\lambda_{n}Dt^{\alpha}) \qquad (17)$$

где, $$C_{n}=\frac{2\lambda_{n}^{2}}{l(\lambda_{n}^{2}+h_{0}^{2})+h_{0}+h_{1}\dfrac{\lambda_{n}^{2}+h_{0}^{2}}{\lambda_{n}^{2}+h_{1}^{2}}}\int_{0}^{l}\varphi(x)(Cos(\lambda_{n}x)+\frac{h_{0}}{\lambda_{n}}Sin(\lambda_{n}x))dx.$$

Здесь λ_{n} корни уравнения

$$tg(\lambda l)=\frac{\lambda(h_{0}+h_{n})}{\lambda^{2}-h_{0}h_{1}}$$

Решение (17) при $\alpha = 1$ совпадает с известным ранее решением . В случае $\alpha = 1/2$, принимает вид

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x)) \cdot \exp(\lambda_n^4 A^2 t^2)\left[1 - erf(\lambda_n^2 At)\right] \qquad (18)$$

Поведение решения (14) при $t \to \infty$ имеет степенной характер [14]

$$\exp(z)(1 - erf(\sqrt{z}) = \exp(z) \cdot erfc(\sqrt{z}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot z}}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{(2z)^m}\right]$$

Это отличается от асимптотического поведения решения (12) который имеет экспоненциальный характер.

Полученные решения могут быть использованы при исследовании процессов тепломассопереноса в системах обладающих фрактальной структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Соболев С.А. // Усп. физ. наук. 1997. Т.167. № 10. С. 1095.

2. Абаржи И.И. // Журн. физ. химии. 1999. Т.73. №11. С.1943.

3. Тимашев С.Ф. //Российский хим. журн. 1997. Т.41. № 9. С.17.

4. П.Берже, И.Помо, К.Видаль . Порядок в хаосе. М.:Мир, 1991. 368 с.

5. Олемской А.И., Флат А.Я //Усп. физ.наук.1993.Т.163. №12.С.1.

6. Гарднер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.:Мир. – 1986. 528 с.

7. Самко С.Г., Килбас Ф.Ф., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск. Наука и техника. 1987.688 с.

8. Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. New York .1974.234 p.

9. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение// Нальчик. Изд-во КБНЦ РАН, 2000. – 299 с

10. Нигматулин Р.И. Дробный интеграл и его физическая интерпретация //ТМФ. 1992. Т.90, №3. С. 354-368.

11. Батунин А.В. Фрактальный анализ и универсальность Фейгенбаума в физике андронов //УФН.1995. Т.165, № 6. С. 645-660.

12.Зосимов В.В., Лямшев Л.М. Континуальное описание аномальной диффузии по гребешковой структуре // 1995. Т.166, № 4. С. 361 – 402.

13. Мейланов Р.П. К теории фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой //Письма ЖТФ. 1996.Т.22, № 23. С.40-43.

14. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии//М.: Высш. шк., 1995.- 301 с.

15. Мейланов Р.П. Обобщенное уравнение одномерной фильтрации с дифференцированиеми дробного порядка //ИФЖ.2001. Т.74, № 2. С. 34-37.

16. Мейланов Р.П., Янполов М.С.Особенности фазовой траектории «фрактального» осциллятора //Письма в ЖТФ. Т.28, №1.С.67-73.

17. Мейланов Р.П. Концепция фрактала в теории теплового поля земли.//Международная конференция «Тепловое поле Земли» Москва 2000 г. С. 63-68.

18. Р.П.Мейланов, Д.А. Свешникова, О.М. Шабанов.//ЖФХ. 2003, Т.77,№ 3, С. 260-264.

19. Кочубей А.Н. Диффузия дробного порядка // ДУ 1990. Т.26, № 4. – С .660 - 670

20. Геккиева С.Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени //Доклады Адыгской АН. 1994. Т.1,№ 1. С.17-18