УДК 512 (075.5)

САМОПОДОБНЫЕ ВИЗУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ КАК ЭФФЕКТИВНОЕ СРЕДСТВО ИЗУЧЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

Емелин А. В.

ФГБОУ ВПО «Арзамасский государственный педагогический институт им. А. П. Гайдара», Арзамас, Россия (607220, г. Арзамас Нижегородской области, ул. Карла Маркса, 36), e-mail: emelinalexandr@yandex.ru

Статья посвящена проблеме изучения иррациональных чисел в школьном курсе алгебры. Сущность этой проблемы, по мнению автора, выражается в недостаточности образной составляющей учебного материала, усиление которой возможно с использованием таких средств обучения, как самоподобные визуальные модели иррациональных чисел. В тех случаях, когда самоподобие может быть наглядно интерпретировано в десятичном представлении иррациональных чисел, становится возможным создание их визуальных моделей, которые могут быть использованы при введении иррациональных чисел и обучении школьников действиям с ними. Если же речь идет об иррациональных числах, записанных не в виде дробей, а с помощью специальных символов и, как следствие, такая наглядная интерпретация представляется затруднительной, то их можно задействовать при создании визуальных моделей, самоподобие которых может заключаться, например, во вложенных друг в друга радикалах или логарифмах; данным свойством может обладать и запись числа, находящегося под их знаком. В частности, с помощью этих моделей можно существенно расширить спектр традиционных заданий новыми формулировками задач и способами их решения, являющимися по своей сути, прежде всего, визуальными; а также представления учащихся об иррациональных числах.

Ключевые слова: визуализация, самоподобие, самоподобная визуальная модель, иррациональные числа.

SELF-SIMILAR VISUAL MODELS AS THE EFFECTIVE REMEDY OF STUDYING OF IRRATIONAL NUMBERS IN THE SCHOOL COURSE OF ALGEBRA

Emelin A. V.

Arzamas State Pedagogical Institute after A.P. Gaidar, Arzamas, Russia (607220, Arzamas the Nizhniy Novgorod area, Charles Marx's street, 36), e-mail: emelinalexandr@yandex.ru

Article is devoted a problem of studying of irrational numbers in a school course of algebra. The essence of this problem, according to the author, is expressed in insufficiency of a figurative component of the teaching material which strengthening is possible with use of such tutorials as self-similar visual models of irrational numbers. When self-similarity can be visually interpreted in decimal representation of irrational numbers, there is possible a creation of their visual models which can be used at introduction of irrational numbers and training of schoolboys to actions with them. If it is a question of the irrational numbers which have been written down not in the form of fractions, and by means of special symbols and, as consequence, such evident interpretation is represented inconvenient they can be involved at creation of the visual models which self-similarity can consist, for example, in the radicals enclosed each other or logarithms; the given property can possess and record of the number which are under their sign. In particular, by means of these models it is possible to expand essentially a spectrum of traditional tasks with fresh wordings of problems and the ways of their decision which are inherently, first of all, visual; and also representations of pupils about irrational numbers.

Key words: visualisation, the self-similarity, self-similar visual model, irrational numbers.

Несмотря на большое количество материала, связанного с изучением иррациональных чисел в школьном курсе алгебры, непериодичность десятичной записи иррациональных чисел и специфическая символика, которая введена для их обозначения, по-прежнему являются главными препятствиями для школьника при их изучении.

Трудность восприятия записи бесконечных непериодических дробей и их усвоения можно объяснить тем, что учащимся непонятна та особенность распределения цифр в их десятичном представлении, которая обеспечивает непериодичность дроби, – существование в десятичном представлении иррационального числа отрезков произвольной конечной длины, в которых находятся не все цифры этого числа, повторяющиеся бесконечное число раз; и что в школьной практике отсутствуют наглядные иллюстрации данного факта. В результате учащиеся оказываются в условиях отсутствия необходимой визуальной опоры при работе с бесконечными непериодическими дробями.

Отсутствие визуальной опоры в заданиях, в свою очередь, является причиной того, что школьники испытывают трудности в усвоении определения иррационального числа, приведении примеров иррациональных чисел, их идентификации во множестве всех десятичных дробей, сравнении иррациональных чисел (иррациональных и рациональных чисел), а также в оперировании ими.

Трудность восприятия и усвоения алгебраических иррациональных чисел обусловлена абстрактной символикой, за которой школьники не видят бесконечных непериодических дробей, и, следовательно, допускают ошибки в понимании радикалов либо как чисел, либо как операций над числами, формально усваивают действия с иррациональными числами, часто ассоциируют все иррациональные числа с алгебраическими иррациональными числами и имеют весьма узкие представления о способах их происхождения. Поэтому принятая символика, удобная в использовании с одной стороны, является определенным визуальным барьером с другой.

Учащиеся должны сначала осознать, что такое иррациональное число, каким образом идентифицировать его среди других чисел и как производить действия с ним, чтобы усвоить его сущность; и только затем приступать к изучению алгебраических иррациональных чисел, чтобы приобрести через ранее полученные знания умения применять иррациональные числа при дальнейшем изучении математики и решении конкретных практических задач. Если это не учитывать в процессе обучения, то в результате школьники будут иметь лишь формальные, фрагментарные и весьма искаженные представления об иррациональных числах, поскольку знания, которые они получат, будут абстрактными, неполными и не всегда обоснованными.

Таким образом, проблема изучения иррациональных чисел в школьном курсе алгебры в психологическом смысле выражается в недостаточности образной составляющей учебного материала, а в методическом − в отсутствии эффективных визуальных средств обучения.

В общей трактовке понятия визуализации прослеживается два основных подхода: 1) визуализация в обучении есть процесс представления знания в наглядной форме; 2) визуализация есть наглядная составляющая знания [4].

Визуальные модели математических объектов обеспечивают наглядность учебного материала, которая, по В. Г. Болтянскому, определяется изоморфным отражением существенных сторон изучаемых объектов в моделях и простотой восприятия моделей [2, с. 307].

По отношению к иррациональным числам существенными чертами являются непериодичность десятичных записей иррациональных чисел и невозможность непосредственного видения бесконечной непериодической дроби в принятой символике. Отсюда понятно, что два данных аспекта и должны находиться в фокусе визуализации иррациональных чисел на уроках алгебры.

Визуализировать иррациональное число – значит построить такую визуальную модель, которая имитирует его бесконечную запись удобным и предсказуемым для зрительного восприятия способом и устанавливает явную связь этого иррационального числа либо с рациональными отношениями, либо с другими относительно простыми иррациональными числами, записываемыми с помощью конечного и сравнительно небольшого числа специальных символов.

Исходя из этого, возникает закономерный вопрос о наиболее предпочтительных способах или методах визуализации иррациональных чисел. Один из таких методов основывается на свойстве самоподобия.

Самоподобие, как известно, является одним из фундаментальных принципов организации структуры окружающего мира и представляет собой характеристическое свойство фрактала – термина, введенного математиком Б. Б. Мандельбротом для обозначения самоподобных математических (геометрических) объектов. Идея самоподобия «выражает собой тот факт, что иерархический принцип организации фрактальных структур не претерпевает значительных изменений при рассмотрении их через микроскоп с различным увеличением. В результате эти структуры на малых масштабах выглядят в среднем так же, как и на больших» [1, с. 6].

Самоподобной визуальной моделью будем называть визуальную модель, обладающую свойством структурного самоподобия, которое может выражаться в структурной идентичности целого и его частей, инвариантности основного структурного принципа записи, а также в сохранении статистических свойств модели относительно различных степеней ее соответствия исходному объекту моделирования. Данное определение является довольно условным, но оно позволяет распространить идею самоподобия с фрактальных множеств на объекты другой природы (в частности, на различные символьные записи), которым также присуще самоподобие, понимаемое уже в более широком смысле.

Покажем на конкретных примерах, как с использованием самоподобных визуальных моделей можно обеспечить более качественное усвоение школьниками учебного материала, связанного с изучением иррациональных чисел.

С помощью самоподобных визуальных моделей становится возможным вскрыть и наглядно продемонстрировать школьникам причину непериодичности десятичной записи иррациональных чисел.

К примеру, в десятичной записи дроби 3,1451454514545451… принцип самоподобия в следовании цифр таков: после первой по счету единицы следует комбинация цифр «45», после второй единицы – «4545», после третьей – «454545» и т.д. В записи данной дроби можно найти отрезок цифр вида «4545…45» любой конечной длины, выражающейся четным числом цифр; причем, ни один из этих отрезков не содержит единицу. Значит, эта десятичная дробь является бесконечной и непериодической, следовательно, она представляет собой иррациональное число.

Самоподобные визуальные модели бесконечных непериодических дробей, аналогичные данной, целесообразно использовать при введении иррациональных чисел, поскольку они соответствуют определению иррационального числа непосредственно, наглядно отражают участвующие в его формулировке понятия и, что весьма существенно, не опираются на какую-либо новую символику.

Познакомившись с несколькими такими самоподобными моделями, учащиеся смогут самостоятельно доказывать иррациональность чисел путем установления бесконечности и непериодичности выражающих их дробей, т.е. сделают первый шаг в усвоении определения иррационального числа.

Например. Докажите иррациональность чисел:

а) 0,010110111011110…;

б) 5,10152025303540….;

в) – 3,691215182124…

В дальнейшем они смогут идентифицировать иррациональные числа во множестве всех десятичных дробей и приводить свои примеры, когда через задачи на доказательство усвоят причину непериодичности и, следовательно, поймут природу иррациональных чисел.

К примеру. Из следующих чисел выпишите все иррациональные числа: 0,(12694); 6,1218243036…; 11/7; π; 45,191891; 112,111211121112…; 3/8; 1,12173217733217773332…; 0,000100020001000200010002…

Самоподобные визуальные модели бесконечных непериодических дробей можно задействовать в задачах на сравнение иррациональных чисел, а также иррациональных и рациональных чисел.

Приведем примеры.

1) Сравните следующие числа:

а) 0,(98) и 0,9889888988889…;

б) – 1,565566555666… и – 1,5656656665…;

в) 0,181818818818881888… и 18/99.

2) Между числами 0,1717171717… и 0,1717717771… найдите рациональное и иррациональное число.

Самоподобные модели бесконечных непериодических дробей удобно применять при обучении школьников действиям с иррациональными числами. Они смогут непосредственно увидеть визуальную основу этих операций и то, как при этом образуются непериодические и периодические бесконечные дроби, поскольку производить действия с некоторыми такими дробями можно так же, как и с конечными, т.е. поразрядно.

В частности, посредством одних лишь радикалов, как известно, нельзя показать то, что сумма двух положительных иррациональных чисел может быть рациональной. Но с помощью самоподобных визуальных моделей бесконечных непериодических десятичных дробей продемонстрировать наглядно этот случай довольно просто.

Возьмем, например, иррациональные числа 0,242244222444… и 0,313311333111… и попробуем сложить их:

$$\begin{array}{r} 0{,}242244222444\ldots \\ +\\ 0{,}313311333111\ldots \\ \hline 0{,}555555555555\ldots \end{array}$$

Как видим, в результате получилось рациональное число 0,(5). Приведем еще один пример:

$$\begin{array}{r} 3{,}868866888666\ldots \\ +\\ 1{,}131133111333\ldots \\ \hline 4{,}999999999999\ldots \end{array}$$

Данный пример наглядно иллюстрирует случай, когда сумма двух положительных иррациональных чисел может быть равна натуральному числу.

Таким образом, использование самоподобных визуальных моделей на уроках алгебры может помочь школьникам в понимании сущности иррациональных чисел и овладении действиями с ними.

При работе с алгебраическими иррациональными числами складывается иная ситуация: за символикой, применяемой для их обозначения, как уже было отмечено, школьники не видят бесконечных непериодических дробей. Для того чтобы они могли усвоить материал, связанный с алгебраическими иррациональными числами, необходимо, чтобы их новые знания были получены в контексте уже имеющихся представлений о бесконечных непериодических дробях, связаны визуально с рациональными отношениями и чтобы типичные ошибки, которые допускают школьники при изучении данного класса иррациональных чисел, были по возможности предупреждены.

Это может быть обеспечено расширением образной базы самих иррациональных чисел за счет внедрения самоподобных визуальных моделей в формулировки задач.

Пример. Докажите, что все следующие числа являются иррациональными: $\sqrt{3}$, $\sqrt{33}$, $\sqrt{333}$, … $\underbrace{\sqrt{333...3}}_{2012}$.

Составление и решение задач, основанных на использовании самоподобных визуальных моделей, представляет особый интерес в том случае, когда свойство самоподобия заключается во вложенных друг в друга радикалах.

Примеры. Докажите, что

1) $\sqrt{m}$, $\sqrt{m+\sqrt{m}}$, $\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}}$, … $\to \dfrac{1+\sqrt{1+4m}}{2}$ [5, с. 11];

2) $\forall m \in N$ и $k \geq 2$ $\sqrt[k]{m}$, $\sqrt[k]{m\sqrt[k]{m}}$, $\sqrt[k]{m\sqrt[k]{m\sqrt[k]{m}}}$, … $\to \sqrt[k-1]{m}$ [3].

Работая с такими задачами, учащиеся имеют возможность получать новые знания об иррациональных числах, которые труднодоступны для восприятия и понимания без использования визуальных средств обучения и метода самоподобия при их создании.

Однако иррациональные числа могут состоять не только из корней и различных их комбинаций, но и, скажем, из иррациональных значений логарифмических функций.

Приведем пример. Найдите предел последовательности

$$\log_2 2,\ \log_2(2+\log_2 2),\ \log_2(2+\log_2(2+\log_2 2)),\ \ldots$$

Такие задания могут способствовать расширению представлений школьников об иррациональных числах и, в частности, о способах их происхождения.

При экспериментальной проверке разработанного методического обеспечения основным критерием был уровень усвоения учащимися темы «Иррациональные числа». Экспериментом были охвачены 88 школьников 9-х классов с углубленным изучением математики и 10-х классов, обучающихся по обычной программе, а также учителя математики МБОУ: «Лицей», «Гимназия», СОШ № 2 г. Арзамаса.

Количественная оценка уровня усвоения учащимися 9-х классов с углубленным изучением математики темы «Иррациональные числа» приведена в таблице 1.

Таблица 1

Классы	Количество учащихся	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Контрольные	25	1 (4%)	19 (76%)	5 (20%)
Экспериментальные	25	0 (0%)	13 (52%)	12 (48%)

Количественная оценка уровня усвоения учащимися 10-х классов темы «Иррациональные числа» представлена в таблице 2.

Таблица 2

Классы	Количество учащихся	Низкий уровень	Средний уровень	Высокий уровень
Контрольные	19	13 (%)	6 (%)	0 (%)
Экспериментальные	19	3 (%)	13 (%)	3 (%)

Для определения статистической значимости экспериментально установленных различий использовался критерий Пирсона χ^2:

1) 9-е классы с углубленным изучением математики: значение $\chi^2_{\text{ÝÌÏ}}$ оказалось равным числу 13,754 при соответствующих критических значениях $\chi^2_{0,05} = 9{,}488$ и $\chi^2_{0,01} = 13{,}277$; это означает, что $\chi^2_{\text{ÝÌÏ}}$ находится в зоне значимости, причем, $\chi^2_{0,01} / \chi^2_{\text{ÝÌÏ}} = 0{,}97$;

2) 10-е классы, обучающиеся по обычной программе: $\chi^2_{\text{ÝÌÏ}} = 13{,}286$, $\chi^2_{0,05} = 9{,}488$ и $\chi^2_{0,01} = 13{,}277$; $\chi^2_{\text{ÝÌÏ}}$ находится в зоне значимости, при этом $\chi^2_{0,01} / \chi^2_{\text{ÝÌÏ}} = 0{,}99$.

Следовательно, с достоверностью 97 % (99 %) существуют различия между уровнями усвоения учащимися темы «Иррациональные числа» в контрольных и экспериментальных 9-х классах с углубленным изучением математики (соответственно в 10-х классах, где обучение осуществляет по обычной программе).

Таким образом, целесообразность изучения иррациональных чисел в школьном курсе алгебры с использованием самоподобных визуальных моделей может быть обоснована тем, что благодаря самоподобию возможно наиболее наглядно вскрыть и продемонстрировать причину непериодичности десятичной записи иррациональных чисел и показать их сущность школьникам, исходя непосредственно из определения, а также в некоторой степени компенсировать абстрактность применяемой для их обозначения символики.

Список литературы

1. Божокин С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы: учебное пособие. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
2. Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2002. – 368 с.
3. Емелин А. В. О применении самоподобия при визуализации иррациональных выражений с использованием программы Mathcad // Инновационные технологии организации обучения на пути к новому качеству образования: сборник материалов VIII Всероссийской научно-практической конференции. Арзамас, 2011 г. – М.: Изд-во СГУ, 2011. – С. 338–343.
4. Емелин А. В., Зайкин М. И. Модель методической системы визуализации иррациональностей в школьном курсе алгебры // Мир науки, культуры, образования. – 2011. – № 5(30). – С. 25–27.
5. Супрун В. П. Избранные задачи повышенной сложности по математике. – Мн.: Полымя, 1998. – 108 с.

Рецензенты:

Зайкин М. И., доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, теории и методики обучения математике ФГБОУ ВПО «Арзамасский государственный педагогический институт им. А. П. Гайдара», г. Арзамас.

Фролов И. В., доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, теории и методики обучения физике ФГБОУ ВПО «Арзамасский государственный педагогический институт им. А.П. Гайдара», г. Арзамас.

Литвинова Татьяна Николаевна, д.п.н., профессор, профессор кафедры фундаментальной и клинической биохимии ГБОУ ВПО «Кубанский государственный медицинский университет» Минздравсоцразвития России, г. Краснодар.